SUPUESTOS DEL MCRL:
1) MULTICOLINEALIDAD

SUPUESTO: NO DEBE EXISTIR MULTICOLINEALIDAD PERFECTA ENTRE VARIABLES EXPLICATIVAS.

El término multicolinealidad se atribuye a Ragnar Frisch (1934), hace referencia a la existencia de una relación lineal entre algunas o todas las variables explicativas[1].

Multicolinealidad perfecta:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k = 0$$

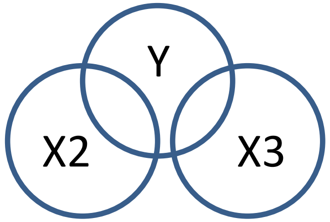
Multicolinealidad no perfecta o menos que perfecta:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k + v_i = 0$$

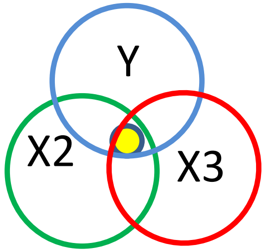
[1] "Estrictamente hablando, la multicolinealidad se refiere a la existencia de más de una relación lineal exacta y colinealidad se refiere a la existencia de una sola relación lineal. Pero esta distinción raramente se mantiene la práctica haciéndose entonces referencia a multicolinealidad en ambos casos". D. Gujarati

¿CUÁNDO NO EXISTE MULTICOLINEALIDAD DE NINGÚN TIPO?

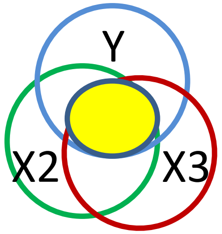
¿CÓMO ES LA MULTICOLINEALIDAD?



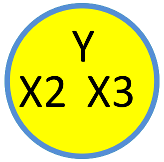
No multicolinealidad



Baja multicolinealidad



Alta colinealidad



Multicolinealidad perfecta

FUENTES MÁS COMUNES DE MULTICOLINEALIDAD:

- Método de recolección de información empleado (manipulación).
- Restricciones en el modelo o en la población objeto de muestreo.
- Incorrecta especificación del modelo.
- Sobredeterminación *(k>n) o sobreidentificación.*
- Regresoras comparten una tendencia común (datos series de tiempo).

ESTIMACIÓN EN PRESENCIA DE MULTICOLINEALIDAD PERFECTA O EXACTA:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k = 0$$

Si la multicolinalidad es perfecta los coeficientes de regresión de las variables explicativas son indeterminados y sus errores estándar son infinitos.

Suponga: $$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + \hat{u}_i$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\sum x_{3i}{}^2) - (\sum y_i x_{3i})(x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}{}^2)(\sum x_{3i}{}^2) - (\sum x_{2i}\, x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{(\sum y_i x_{3i})(\sum {x_{2i}}^2) - (\sum y_i x_{2i})(x_{2i} x_{3i})}{(\sum {x_{2i}}^2)(\sum {x_{3i}}^2) - (\sum x_{2i}\, x_{3i})^2}$$

Suponga que $x_{3i} = \lambda x_{2i}$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\lambda^2 \sum {x_{2i}}^2) - (\lambda \sum y_i x_{2i})(\lambda {x_{2i}}^2)}{(\sum {x_{2i}}^2)(\lambda^2 \sum {x_{2i}}^2) - \lambda^2(\sum {x_{2i}}^2)^2} = \frac{0}{0}$$

Lo mismo ocurre para $\hat{\beta}_3$.

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + \hat{u}_i$$

$$= \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3(\lambda x_{2i}) + \hat{u}_i$$

$$= (\hat{\beta}_2 + \lambda\hat{\beta}_3) x_{2i} + \hat{u}_i$$

$$= \hat{\alpha} x_{2i} + \hat{u}_i \longrightarrow$$

No se puede separar el efecto de las V.E
no se pueden estimar los betas

Haciendo uso del enfoque matricial no existe la inversa $(X'X)^{-1}$ por tanto no puede estimarse $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$. Los $\hat{\beta}$ resultan indeterminados y de varianza infinita. Su matriz de covarianzas que viene dada por $Var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$ no puede estimarse.

Así:

$$X'X = \sum_{1}^{T} x_{2t} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Que tiene rango igual a 1 y es, por tanto una matriz singular, $|X'X| = 0$

Esto reduce el sistema de ecuaciones a:

$$\sum_{1}^{T} x_{2t} y_t = \hat{\beta}_2 \sum_{1}^{T} x_{2t}^2 + \lambda \beta_3 \widehat{\sum_{1}^{T}} x_{2t}^2$$

Que tiene infinitas soluciones. Sin embargo, existe una única solución para la combinación lineal $\hat{\beta}_2 + \lambda \hat{\beta}_3$.

ESTIMACIÓN EN PRESENCIA DE MULTICOLINEALIDAD "ALTA" PERO NO PERFECTA:

Si: $x_{3i} = \lambda x_{2i} + v_i$

$\lambda_i \neq 0$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\lambda^2 \sum x_{2i}{}^2 + \sum v_i{}^2) - (\lambda \sum y_i x_{2i} + \sum y_i v_i)(\lambda x_{2i}{}^2)}{(\sum x_{2i}{}^2)(\lambda^2 \sum x_{2i}{}^2 + \sum v_i{}^2) - (\lambda \sum x_{2i}{}^2)^2}$$

De igual forma se puede derivar $\hat{\beta}_3$.

CONSECUENCIAS PRÁCTICAS DE LA MULTICOLINEALIDAD:

- La multicolinealidad genera pérdida de precisión. Un ejemplo[2]

Considere el siguiente modelo

$$\hat{y}_t = 8 + 5x_{2t} - 3x_{3t}$$

Donde $E(u_t) = 0; \quad E(u_t, u_s) = 0 \;\; para\; s \neq t \;;\; E(u_t^2) = 25.$

	Correlación =0.0	Correlación = 0.90	Correlación =0.99
$\rho(x_{2t}, x_{3t})$	0.009	0.898	0.99
$\lvert X'X \rvert$	0.992	0.194	0.021
$\hat{\beta}_1$	8.03	7.93	7.96
$\hat{\beta}_2$	5.1	5.13	5.25
$\hat{\beta}_3$	-3	-3.18	-3.28
$\hat{\sigma}_u^2$	25.3	26.2	24.13
$Var(\hat{\beta}_2)$	0.233	1.29	11.22
$Cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$	-0.001	-1.05	-11.01
$Var\ (\hat{\beta}_3)$	0.232	1.06	11.03

[2] Ejemplo tomado de Novales, A. Páginas 346-349.

- Aun cuando los estimadores MCO son MELI, presenta varianzas y covarianzas grandes que dificultan una estimación precisa.

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{\sum x_j{}^2(1-R_j{}^2)} \qquad\qquad Var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2(V\Lambda V')^{-1} = \sigma_u^2(V\Lambda^{-1}V')$$

Λ: matriz diagonal de los valore propios de $X'X$

V: $matriz\ ortogonal$

- Los intervalos de confianza tienden a ser más amplios y los estadísticos t a ser más pequeños, por ello aumenta la posibilidad de no rechazar Ho.

- Aun cuando los t sean estadísticamente no significativos el R^2 puede ser muy alto.

- Los estimadores MCO y sus errores estándar son sensibles a pequeños cambios en la información.

DETECCIÓN DE LA MULTICOLINEALIDAD:

Antes de determinar cómo se descubre la presencia multicolinealidad se debe tener en cuenta lo que argumenta Kmenta:

1) La multicolinealidad es un problema de grado y no de clase.

2) Como la multicolinealidad se refiere a la condición de las variables explicativas que no son estocásticas, es una característica de la muestra y no de la población.

No se tiene un método específico para detectar la multicolinealidad, lo que existe en realidad son ciertas reglas prácticas formales e informales como:

- Un R^2 elevado pero pocas razones t significativas.

$$\hat{y}_t = 10.81 - 2.92x_{2t} - 0.54x_{3t}$$
$$(1.6) \quad (0.42) \quad (0.21)$$
$$R^2 = 0.92 \qquad \hat{\sigma}_u^2 = 2.09$$

- Alta correlación de orden cero entre parejas de regresoras[3]. Un coeficiente de correlación entre las variables explicativas superior a 0.8 da indicios de la presencia de multicolinealidad pero no es una regla clara.

	CONS	ING	RIQ
CONS	1.000000	0.980847	0.978100
ING	0.980847	1.000000	**0.998962**
RIQ	0.978100	**0.998962**	1.000000

[3] Las correlaciones de orden cero elevadas son una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de multicolinealidad debido a que ésta puede existir a pesar de que dichas correlaciones sean bajas.

- Regresiones auxiliares de las variables explicativas: si el R^2 de la regresión auxiliar es superior al R^2 de la regresión original se sospecha de multicolinealidad. ***Regla práctica de Klien.***

- Valores propios[4] e índice de condición:

$$IC = \sqrt{\frac{Máximo\ valor\ propio}{Mínimo\ valor\ propio}} = \sqrt{k}$$

Si k está entre 100 y 1000 existe una colinealidad de moderada a fuerte. Si excede a 1000 es una multicolinealidad severa.

- Factor inflador de varianza (FIV) y tolerancia (TOL):

$$FIV = \frac{1}{(1 - {R_{23}}^2)}$$

Si FIV > 10 se dice que la variable es altamente colineal.

$$TOL = \left(1 - {R_{23}}^2\right) = \frac{1}{FIV}$$

[4] El vector propio o eigenvector $\vec{v}$ de una matriz A_{nxn} es una matriz de orden *n x1* tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ donde λ es un valor escalar real que recibe el nombre de valor propio o eigenvalor.

Mientras más cerca este la tolerancia de cero, mayor será el grado de colinealidad de esas regresoras.

¿Cómo hacerlo en R?

```
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.096365 -0.023643 -0.006354  0.023855  0.081585

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.6116010  0.1276724   4.790 0.000111 ***
PIBPC       -0.1613225  0.0606044  -2.662 0.014974 *
CT           0.0218109  0.0052844   4.127 0.000522 ***
Tip         -0.0042898  0.0008723  -4.918 8.31e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.04702 on 20 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7959, Adjusted R-squared: 0.7653
F-statistic: 25.99 on 3 and 20 DF,  p-value: 4.191e-07


> vif(LinearModel.4)
   PIBPC       CT      Tip
1.393787 1.403977 1.016751
```

```
> cor(Datos[,c("CT","M","PIBPC","Tip")], use="complete")
              CT          M       PIBPC         Tip
CT     1.0000000  0.7062248 -0.52579669 -0.09031420
M      0.7062248  1.0000000 -0.56217319 -0.53599589
PIBPC -0.5257967 -0.5621732  1.00000000 -0.03009379
Tip   -0.0903142 -0.5359959 -0.03009379  1.00000000
```

fix(Informal)
LinearModel.1 <- lm(M ~ PIBrpc +Tip + CT, data=Informal)
summary(LinearModel.1)
cor(Informal[,c("CT","M","PIBrpc","Tip")], use="complete")
vif(LinearModel.1)

MEDIDAS CORRECTIVAS:

- No hacer nada. Los estimadores MCO siguen siendo MELI. PERO ESTA NO ES UNA SOLUCIÓN MUY ADECUADA, SOLO ES APLICABLE A SITUACIONES EXTREMAS.

- Datos nuevos o adicionales.

- Información a priori.

- Combinación de información de corte transversal y de series de tiempo.

- Eliminación de variables. ***ESTO PUEDE GENERAR SESGO DE ESPECIFICACIÓN.***

- Transformación de variables.

- Regresiones polinomiales.

- Regresión en cresta*[5]. $\hat{\beta}_c = (X'X + cI_k)^{-1}X'Y$. Sin embargo, se puede generar un estimador sesgado. Ahora si se elige adecuadamente el valor de c, su matriz de varianzas $\sigma_u^2(X'X + cI_k)^{-1}X'X(X'X + cI_k)^{-1}$ puede ser menor que la del estimador MCO.

- Utilizar componentes principales*.

[5] * Son técnicas no aplicables a nivel del curso de econometría I.

Lecturas recomendadas:

- ✓ Gujarati, D. y Porter, D. (2010). Econometría. 5ta. Edición McGraw Hill. Capítulo 10.
- ✓ Novales, A. (1993). Econometría. 2da. Edición. McGraw Hill Interamericana. Capítulo 10.
- ✓ Wooldridge, Jeffrey M. (2010). Introducción a la econometría. Un enfoque moderno. 4ta Edición. CENGAGE Learning.